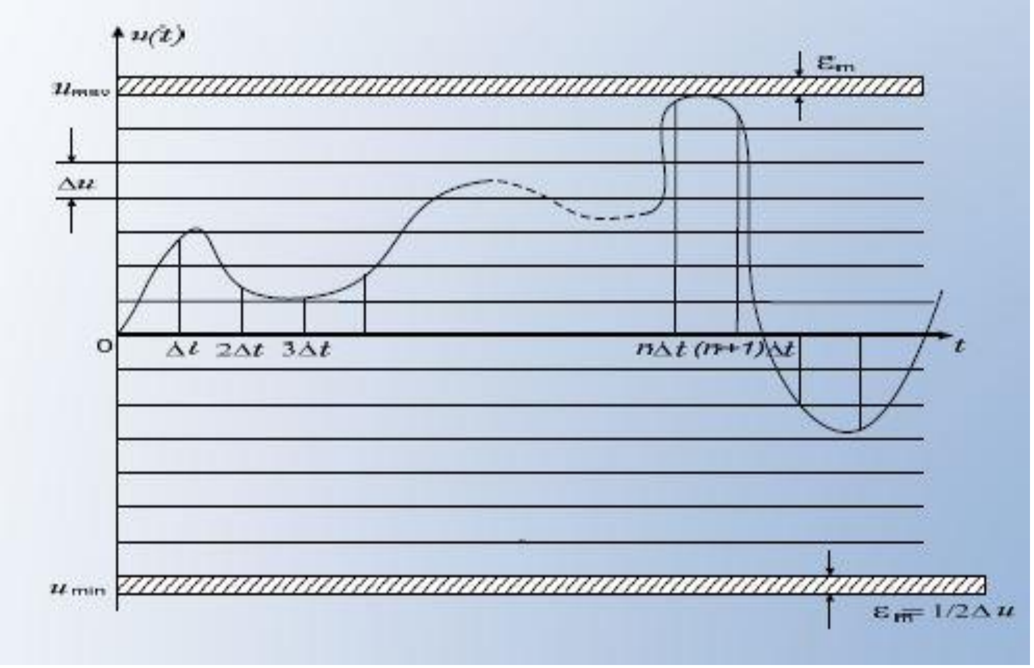
DISKRETIZACIJA PO TRENUTNIM VRIJEDNOSTIMA SIGNALA

Izvor kontinualnih poruka generiše beskrajno mnogo različitih formi signala f *(t)*, od kojih svaki ponaosob predstavlja jednu konkretnu poruku. Neka je jedan od tih signala, recimo *u(t)* predstavljen slikom:



Kvantizacija signala u(t)

- Signal *u(t)*, koji predstavlja kontinualnu poruku, može da ima bilo koju vijednost između U_{min} i U_{max} i spektar mu se nalazi u intervalu učestanosti od *0* do f_{m}. Sve realne poruke praktično zadovoljavaju ovaj uslov. Ako primijenimo teoremu o odabiranju, signal *u(t)* možemo predstaviti skupom diskretnih vrijednosti uzetih u trenucima odabiranja.

- Za neku drugu poruku dobićemo na isti način drugi skup diskretnih vrijednosti signala koji ga predstavlja, za treću dobili bi treći skup itd. Kako svaki odbirak može imati bilo koju vrijednost između U_{min} i U_{max}, to je jasno da bi za predstavljanje skupa poruka ovakvog izvora bio potreban alfabet koji bi imao beskonačno mnogo simbola. Zato je neophodno obaviti diskretizaciju po trenutnoj vrijednosti signala.

U realnim uslovima u svim komunikacionim sistemima postoje smetnje koje mogu da maskiraju signale. Korisnik poruke, sa svoje strane, raspolaže nekom konačnom osjetljivošću prijema, odnosno konačnom moći rezolucije. Zbog ovoga, signali koji se vrlo malo razlikuju među sobom, interpretiraju se gotovo identično. Kao posljedica ovih činjenica, prirodno se javlja ideja da je moguće prenos obaviti sasvim korektno i uz izvjesne greške.

Ako na osnovu svega ovoga moguću dozvoljenu grešku u reprodukciji trenutne vrijednosti signala označimo sa ε_m, onda je jasno da će prenos biti "vjeran", ako se trenutna vrijednost signala poruke *u(t),* odbirak, reprodukuje bilo kojom njenom vrijednošću $u_\varepsilon(t)$ koja se nalazi u intervalu:

$$s\ (t) - \varepsilon_m \leq s_\varepsilon(t) \leq s\ (t) + \varepsilon_m$$

Drugim riječima, sve vrijednosti *u(t)* koje se nalaze u ovom intervalu obrazuju jednu klasu. Njena je osobina da se bilo koja trenutna vrijednost iz te klase, na prijemu reprodukuje na isti način. Ovo nam pruža mogućnost da zahvaljujući kriterijumu o vjernosti reprodukcije poruke, cio raspoloživi dijapazon trenutnih vrijednosti kvantiziramo korakom:

$$\mathrm{D}u = 2e_m$$

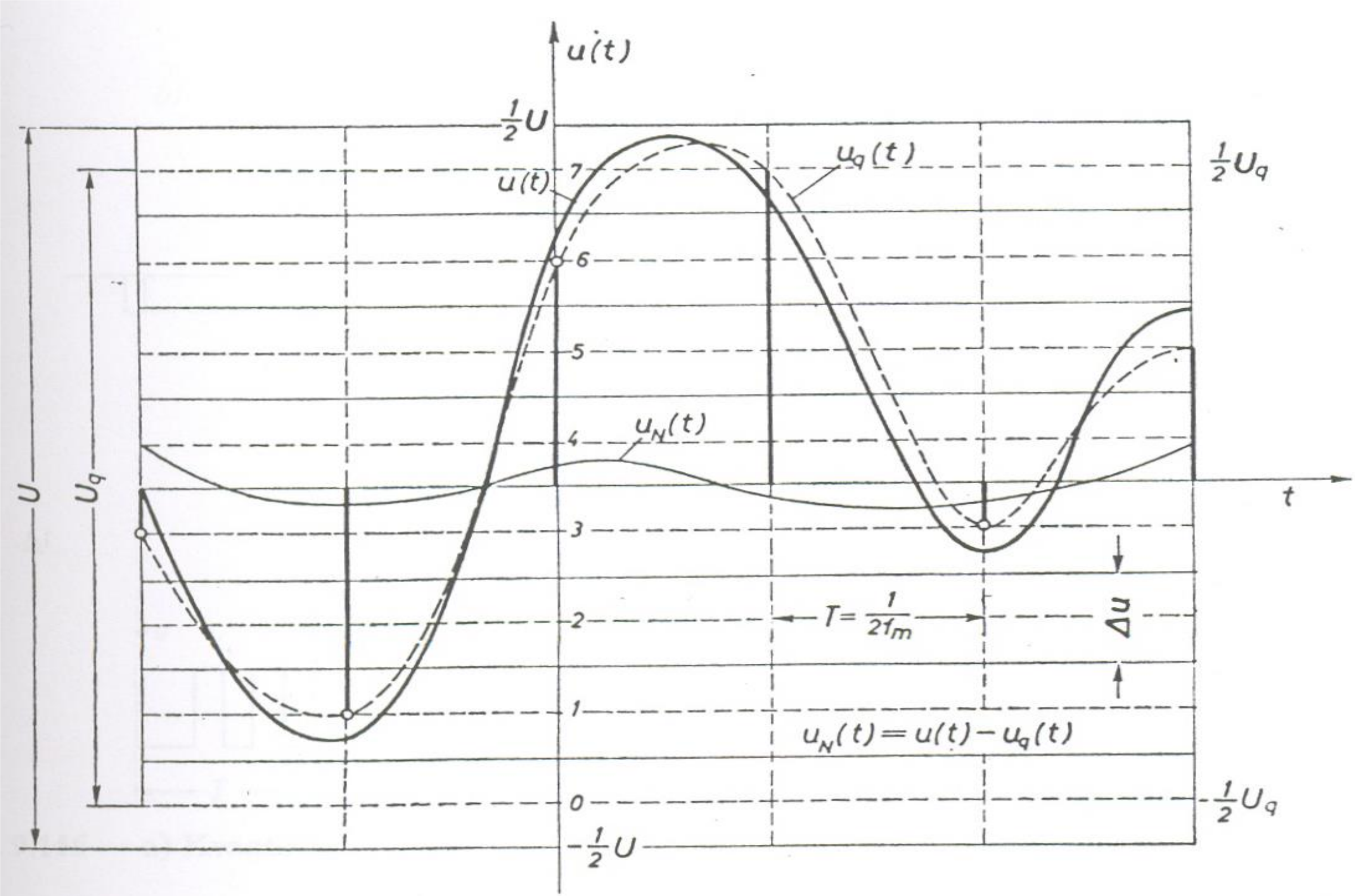
Na taj način se obavlja diskretizacija po trenutnoj vrijednosti, ili kako se još naziva, po amplitudi, odnosno nivou ili po odbirku. Tada će biti dovoljno, umjesto svih mogućih vrijednosti amplituda u(t) koje se nalaze u prethodno definisanom intervalu, prenositi samo jednu vrijednost: predstavnika te klase. Sa slike se vidi da je broj kvantizacionih nivoa:

$$q = \frac{u_{\max} + |u_{\min}|}{2e_m}$$

Kako je za mnoge realne poruke $U_{max} = |U_{min}|$, to će biti:

$$q = \frac{U_{\max}}{e_m}$$

Iz ovog izraza se vidi da će za date vrijednosti U_{min} *i* U_{max} , veličina *q* biti konačna. Pri prenosu skupa poruka biće potrebno prenijeti sve moguće kvantizirane vrijednosti odbiraka. Kako njih ima *q*, to je jasno da i alfabet koji će služiti za prenos ovih poruka mora imati *q* različitih simbola. Ukoliko je dozvoljena greška ε_m manja, biće potrebno da alfabet sadrži više različitih simbola.



Originalan signal u(t) koji se prenosi; u_q(t) predstavlja primljeni signal na bazi kvantiziranih odbiraka signala u(t); u_N(t) predstavlja grešku kvantizacije

- Neka je u(t) signal poruke maksimalne učestanosti u spektru f_m. Umjesto da prenosimo ovaj signal, možemo da prenosimo njegove odbirke koji predstavljaju vrijednosti signala u(t) u trenucima odabiranja $t=nT=n/2f_m$, gdje je n = 0, ±1, ±2. . . Izvršimo kvantizaciju odbiraka signala u(t) prije nego što ih prenesemo.
- Neka je signal u(t) takav da se sve njegove pozitivne i negativne vrijednosti nalaze u intervalu *[-U/2, U/2]*. Neka se "zaokruživanje“ vrijednosti amplituda odbiraka vrši tako da dozvoljena greška ne bude veća od $\pm\frac{1}{2}\Delta u$. To znači da ćemo interval U podijeliti na q podintervala, tako da je: $U = q\Delta u$

Veličina Δu naziva se **korak kvantizacije**. Moguće vrijednosti amplituda odbiraka su:

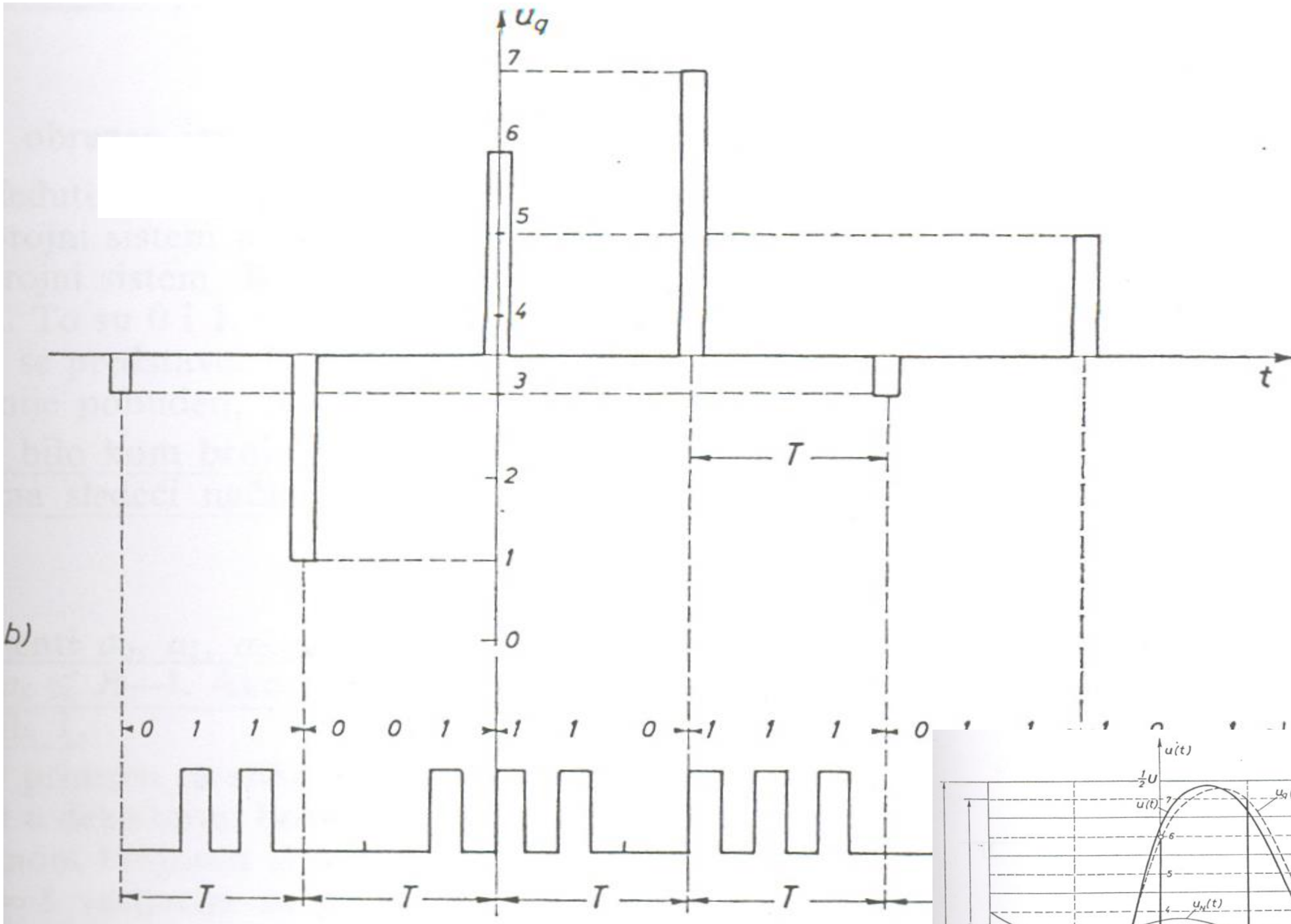
$$\pm\frac{1}{2}\Delta u, \pm\frac{3}{2}\Delta u, \pm\frac{5}{2}\Delta u, \ldots \pm\frac{q-1}{2}\Delta u,$$

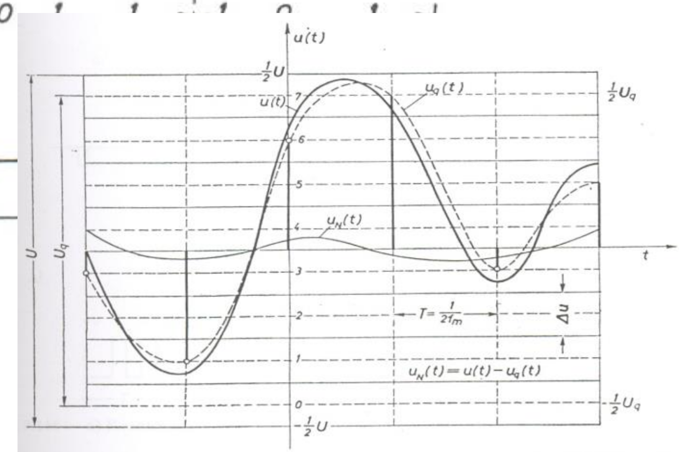
- Drugim riječima, ako se amplituda nekog odbirka signala u(*t*), nađe između dvije puno izvučene horizontalne linije, uzeće se umjesto njene stvarne vrijednosti koju definiše crticama izvučena horizontalna linija koja prolazi sredinom tog intervala. Na taj način je izvršena kvantizacija odbiraka signala u(*t*) .
- U principu, mogli bi se prenositi ovako dobijen kvantizirani odbirci. Na prijemu, njihovi propuštanjem kroz filtar propusnik niskih učestanosti, dobio bi se signal $u_q(t)$. On je na prethodnoj slici predstavljen isprekidanom linijom. Ovaj signal se razlikuje od signala u(*t*). Ta razlika će biti manja ukoliko je korak kvantizacije Δu manji. Ova razlika:

$$u_N(t) = u(t) - u_q(t)$$

se naziva **greškom kvantizacije ili izobličenjem kvantizacije** i takođe je prikazana na prethodnoj slici. Ukoliko je ovo izobličenje malo, ovakav prenos može da se prihvati.

Na sledećoj slici ponovo su nacrtani kvantizirani odbirci u vidu uskih impulsa:



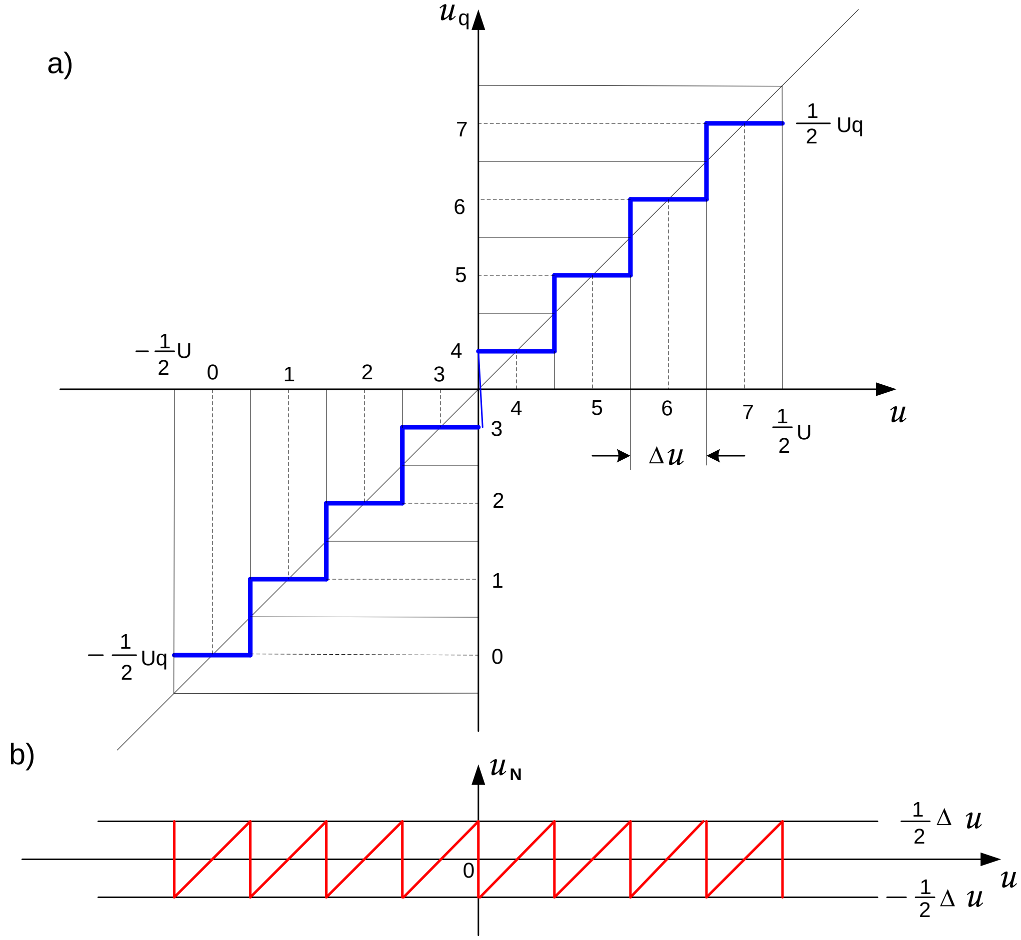


Kvantizirani odbirci signala u(t)

Sa slike se uočava da amplituda svakog od odbiraka ima jednu određenu vrijednost iz skupa mogućih vrijednosti. Pošto je taj skup konačan, znači da se mogu numerisati te moguće vrijednosti. U prethodnom primjeru ih ima 8, pa ćemo početnu vrijednost obilježiti sa 0, drugu sa 1, i tako redom do 7.

RAVNOMJERNA KVANTIZACIJA

Za procjenu greške kvantizacije koristi se snaga šuma kvantizacije koja predstavlja srednju kvadratnu vrijednost greške kvantizacije.



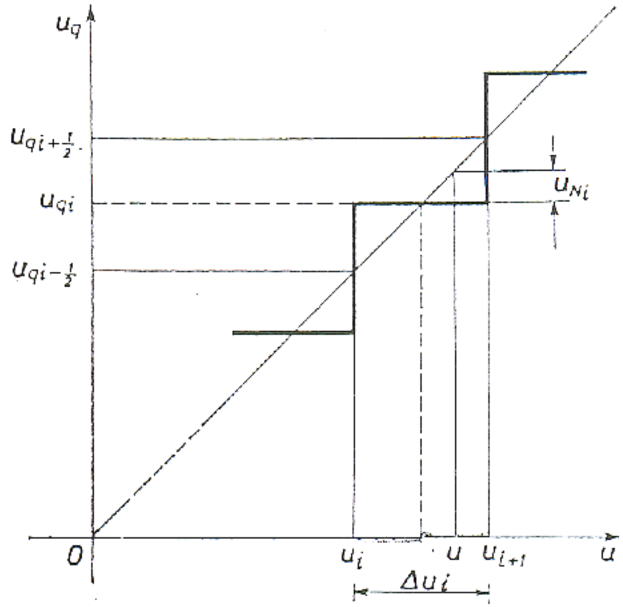
a) Karakteristika kvantizatora ; b) karakteristika greške kvantizacije

Karakteristika ravnomjerne kvantizacije je stepenasta funkcija, pri čemu su na apcisi nanesene vrijednosti odbiraka u, signala u(*t*), a na ordinati vrijednosti kvantiziranih odbiraka u_q. Ako sa *q* označimo broj kvantizacionih nivoa, onda:

$$U = q\Delta u$$

$$U_q = (q-1)\Delta u$$

Na prethodnoj slici prikazana je karakteristika greške kvantizacije u_N u zavisnosti od amplituda odbiraka signala u(*t*). Uočava se da će greška biti utoliko manja ukoliko je korak kvantizacije Δu manji.



Svaki odbirak amplitude u iz kvantizacionog intervala (u_i,u_{i+1}), poslije kvantizacije ima ampltudu u_{qi}

Neka je amplituda u odbirka signala u(*t*) takva da se nalazi u intervalu

$$u_i \leq u \leq u_{i+1}$$

Amplitude svih odbiraka koje se nađu u ovom intervalu, poslije kvantizacije iznosiće u_{qi}. Prema tome, greška koja se čini u ovom intervalu, biće:

$$u_{Ni} = u - u_{qi}$$

Neka je *p(u)du* vjerovatnoća da se amplituda odbirka signala u(*t*) koji kvantiziramo nalazi u intervalu od *u* do *u + du.* Sa *p(u)* je označena funkcija gustine vjerovatnoće odbiraka signala u(*t*).

Prema tome, srednja kvadratna vrijednost greške u posmatranom intervalu (u_i , u_{i+1}) biće:

$$\overline{u_{Ni}^2} = \int_{u_i}^{u_{i+1}} \left(u - u_{qi}\right)^2 p(u) du$$

Sa slike se vidi da je:

$$u_{qi} = \frac{1}{2}\left(u_i + u_{i+1}\right)$$

Drugim riječima, u_{qi} dijeli interval $u_{i+1} - u_i = \Delta u_i$ na dva jednaka dijela, pa je:

$$u_i = u_{qi} - \frac{1}{2}\Delta u_i$$

$$u_{i+1} = u_{qi} + \frac{1}{2}\Delta u_i$$

Pretpostavimo da je interval Δu_i, odnosno korak kvantizacije mali tako da se može smatrati da se funkcija gustine vjerovatnoće u ovom intervalu ne mijenja i da iznosi:

$$p(u) = p\left(\frac{u_i + u_{i+1}}{2}\right) = p(u_{qi}) \quad \text{za } u_i \le u \le u_{i+1}$$

Ovo omogućava da *p(u)* izvučemo ispred znaka integrala, pa dobijamo:

$$\overline{u_{Ni}^2} = p(u_{qi}) \int_{u_{qi}-\frac{1}{2}\Delta u_i}^{u_{qi}+\frac{1}{2}\Delta u_i} (u - u_{qi})^2 \, du = \frac{1}{12} p(u_{qi}) (\Delta u_i)^3$$

Ukupna srednja kvadratna vrijednost greške $\overline{u_N^2}$ biće jednaka sumi vrijednosti $\overline{u_{Ni}^2}$ iz svih intervala. Njih ima koliko i koraka kvantizacije, to jest *q*.

$$\overline{u_N^2} = \sum_{i=0}^{q-1} \overline{u_{Ni}^2} = \frac{1}{12} \sum_{i=0}^{q-1} p(u_{qi})(\Delta u_i)^3$$

Pošto posmatramo ravnomjernu kvantizaciju, korak kvantizacije je konstantan tj. $\Delta u_i = \Delta u = \text{const}$

Stoga prethodni izraz možemo napisati u obliku:

$$\overline{u_N^2} = \frac{1}{12} (\Delta u)^2 \sum_{i=0}^{q-1} p(u_{qi}) \Delta u$$

Veličina $p(u_{qi})\,\Delta u = p(u_{qi})\,(u_{i+1} - u_i)$ predstavlja vjerovatnoću da se amplituda odbirka *u* nalazi između u_i i u_{i+1}, dakle u *i* – tom intervalu. Suma ovakvih vjerovatnoća za sve *q* intervale mora da bude jednaka 1, jer se sve amplitude nalaze u dijapazonu obuhvaćenom sa *q* intervala.

Zato je:

$$\sum_{i=0}^{q-1} p\left(u_{qi}\right)\Delta u = 1$$

pa je:

$$\overline{u_N^2} = \frac{1}{12}\left(\Delta u\right)^2, \quad \Delta u = const$$

Dakle, u slučaju ravnomjerne kvantizacije, srednja kvadratna vrijednost greške zavisi samo od koraka kvantizacije Δu. Ovakva greška ne može da se izbjegne. Ona se manifestuje kao šum i njena srednja kvadratna vrijednost

$$P_{Nq} = \overline{u_N^2} = \frac{1}{12}\left(\Delta u\right)^2$$

se naziva **snagom šuma kvantizacije**.

Za ocjenu kvaliteta samog postupka kvantizacije služi odnos srednje snage kvantiziranog signala i snage šuma kvantizacije, i on se jednostavno naziva odnosom signal/šum kvantizacije.

Pretpostavimo da je u(t) signal čiji su odbirci takvi da se amplituda bilo kojeg od njih nalazi u intervalu $-\frac{1}{2}U \leq u \leq \frac{1}{2}U.$

Neka je $u_q(t)$ kvantizirani signal čiji odbirci u_q mogu imati amplitude:

$$\pm\frac{1}{2}\Delta u, \pm\frac{3}{2}\Delta u, \pm\frac{5}{2}\Delta u, \ldots \pm\frac{q-1}{2}\Delta u$$

Pretpostavimo još da je u(t) takav signal da su amplitude svih njegovih odbiraka jednako vjerovatne. To znači da je funkcija gustine vjerovatnoće *p(u) =* p_0 *= const,* pa je srednja snaga signala u(t):

$$P_s = \int_{-\frac{1}{2}U}^{\frac{1}{2}U} u^2 p(u) du = p_0 \int_{-\frac{1}{2}U}^{\frac{1}{2}U} u^2 du = \frac{1}{12} p_0 U^3$$

Kako je:

$$p_0 U = p_0\left[\frac{1}{2}U - \left(-\frac{1}{2}\right)U\right] = 1$$

izraz za srednju snagu signala P_s glasi:

$$P_s = \frac{1}{12}U^2 = \frac{1}{12}q^2(\Delta u)^2$$

Izračunajmo sada srednju snagu P_q kvantiziranog signala $u_q(t)$. Ona je jednaka srednjoj kvadratnoj vrijednosti amplituda kvantiziranih odbiraka. S obzirom da su sve amplitude odbiraka jednako vjerovatne važi:

$$P_q = \frac{1}{q}2\frac{(\Delta u)^2}{4}\left[1 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (q-1)^2\right] = \frac{q^2 - 1}{12}(\Delta u)^2$$

Upoređujući dva poslednja izraza dobija se:

$$P_s - P_q = \frac{1}{12}q^2(\Delta u)^2 - \frac{q^2 - 1}{12}(\Delta u)^2 = \frac{1}{12}(\Delta u)^2 = P_{Nq}$$

Traženi odnos srednje snage kvantiziranog signala i šuma kvantizacije koji postoji na izlazu iz predajnika biće jednak:

$$A_{Nq} = \frac{P_q}{P_{Nq}} = q^2 - 1$$

Pošto je uvijek $q^2 >> 1$, to se može napisati:

$$A_{Nq} \cong q^2$$

Iz ovog izraza se vidi da što je *q* veće, to je i veći odnos/signal šum kvantizacije. Obično se ovaj odnos izražava u decibelima:

$$a_{Nq} = 10\log A_{Nq} = 10\log\left(q^2 - 1\right) \cong 20\log q$$

Eksperimentalno je utvrđeno da je 16, pa čak i 8 kvantizacioniih nivoa dovoljno za dobru razumljivost prenesenog govora. Međutim, pri ovakvom broju nivoa šum je veoma izrazit. Za kvalitet koji se smatra besprekornim koristi se 128 kvantizacionih nivoa.

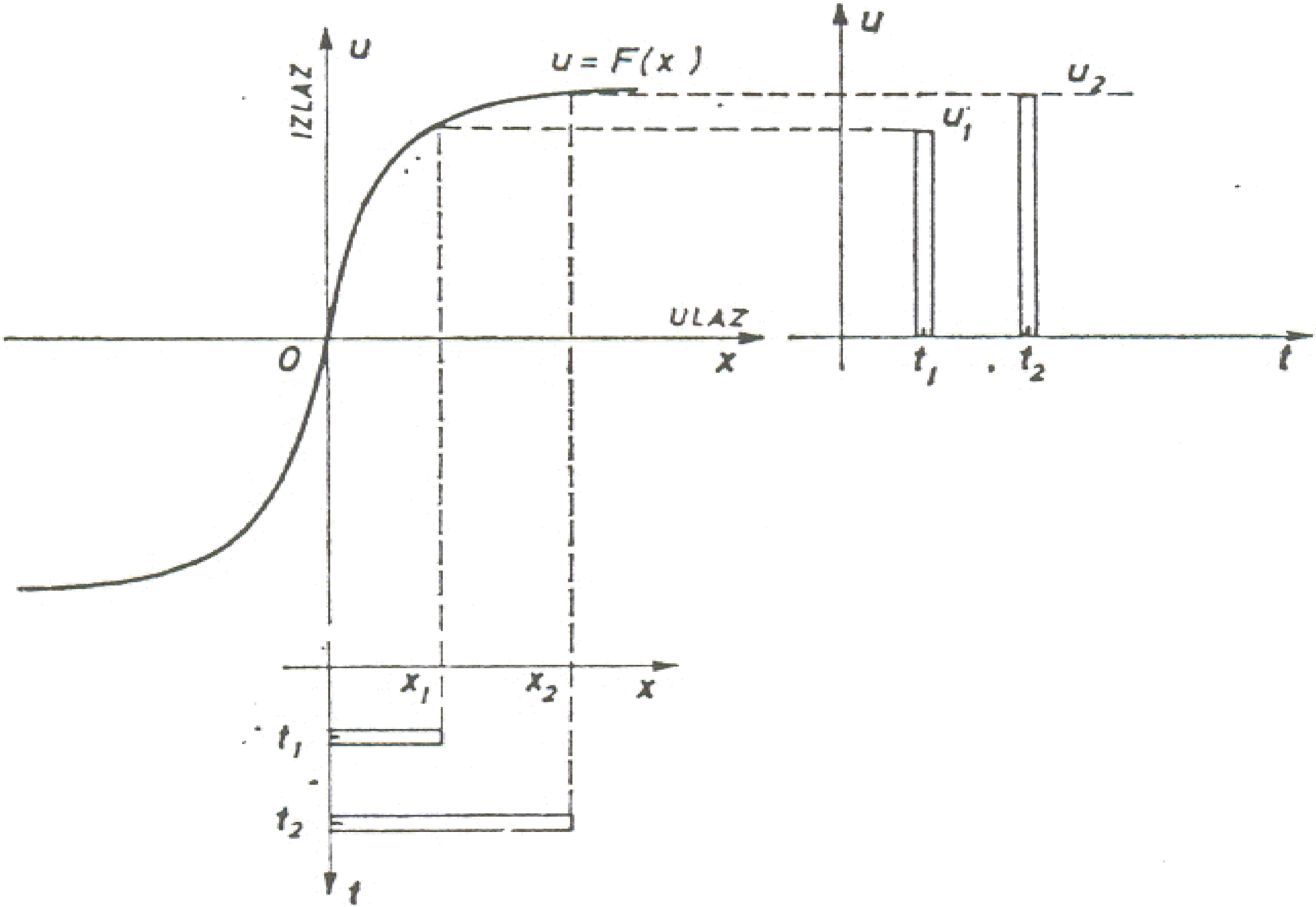
NERAVNOMJERNA KVANTIZACIJA. KOMPRESIJA

Pokazali smo da srednja snaga šuma ravnomjerne kvantizacije zavisi samo od koraka kvantizacije Δu, a ne od amplitude signala. Prema tome, ako bi se za jedan dati signal koristila ravnomjerna kvantizacija, jasno je da bi odnos signal/šum kvantizacije bio veliki za veće amplitude, a mali za male.

Ako u statistici signala preovlađuju signali malih amplituda, ravnomjerna kvantizacija ne predstavlja optimalno rješenje. Zadržavajući isti broj koraka kvantizacije *q,* bolje je uzeti male korake za signale malih amplituda, a veće za signale većih amplituda, jer će na taj način, odnos signal/šum kvantizacije biti znatno poboljšan za male signale, a neznatno pogoršan za velike.

U principu je moguće da se napravi sklop koji bi direktno obavljao neravnomjernu kvantizaciju odbiraka primarnog signala, pri čemu bi zakon promjene širine koraka kvantizacije bio diktiran određenom statistikom signala. Međutim, postoji i jedno bolje i jednostavnije rješenje.

Najprije se odbirci primarnog signala propuste kroz jedan nelinearan sklop koji se naziva **kompresorom.** Njegova karakteristika " izlaz - ulaz" prikazana je na sledećoj slici funkcijom *u=F(x).*

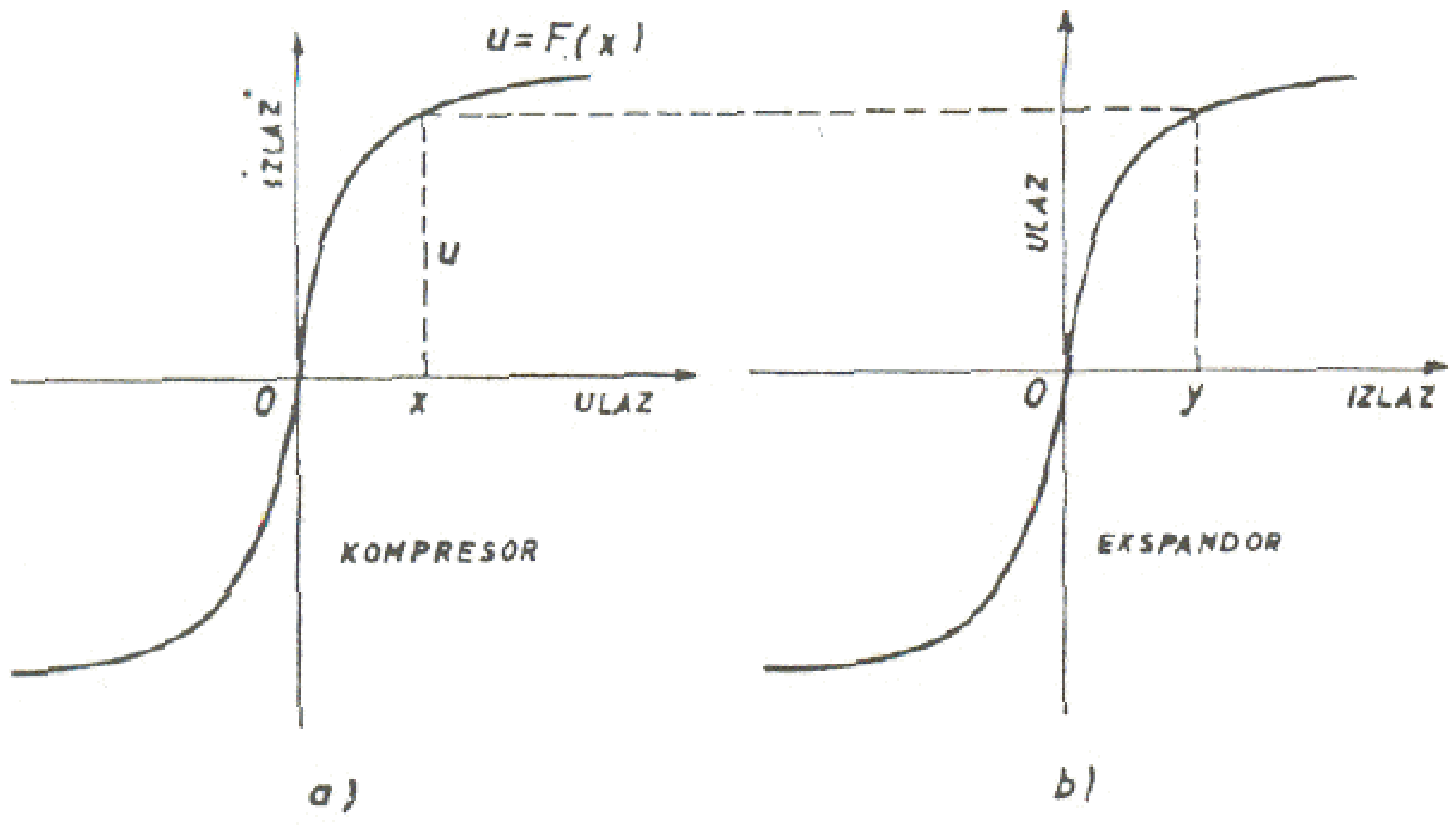


Karakteristika kompresora u = F(x)

- Pri tome *x* predstavlja amplitudu odbiraka signala, na ulazu u kompresor, a *u* amplitudu odbiraka na njegovom izlazu. Lako je uočiti funkciju kompresora. On odbirke malog intenziteta znatno više pojačava od obiraka velikog intenziteta. Na taj način, dijapazon između malih i velikih amplituda koji postoji na ulazu u kompresor, na izlazu biva komprimovan. Ovakav sklop mora da dejstvuje trenutno, pa se stoga naziva trenutnim kompresorom, za razliku od nekih drugih koji to nisu.

- Ako se sada, na odbirke koji su dobijeni na izlazu iz kompresora, primijeni postupak ravnomjerne kvantizacije, jasno je da će se postići onaj osnovni cilj: odbirci malog intenziteta biće "finije" kvantizirani od onih velikog intenziteta. Naravno, karakteristika kompresora *u = F(x)* zavisi od statistike signala.

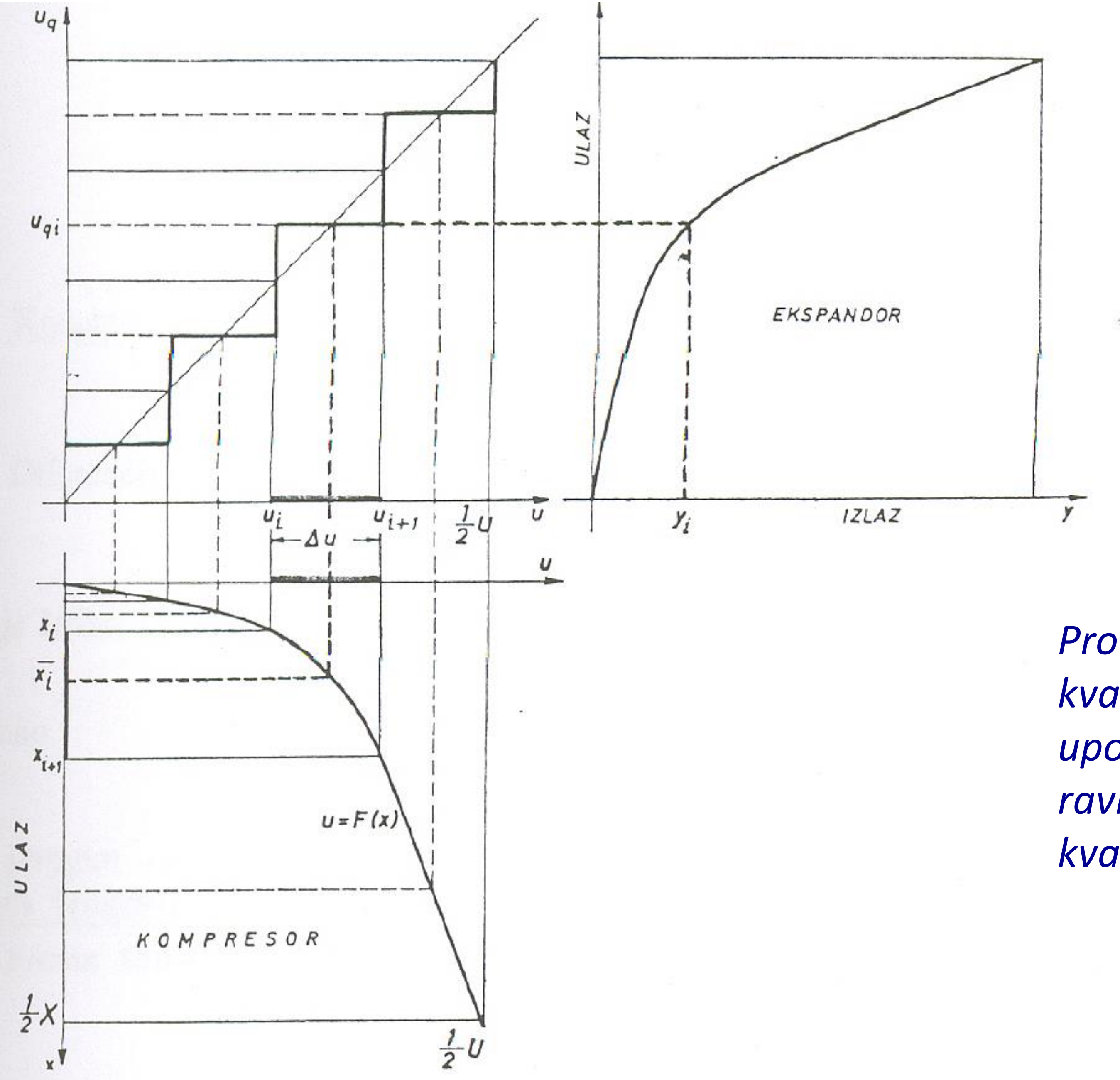
- Na prijemnoj strani potrebno je obaviti operaciju inverznu kompresiji, da bi se dobili originalni odbirci. To se obavlja sklopom koji se naziva trenutnim **ekspandorom.** Ako je karakteristika "izlaz - ulaz" onakva kakva je prikazana na prethodnoj slici, onda ekspandor mora da ima istu takvu karakteristiku, s tim što ona predstavlja zavisnost "ulaza od izlaza", a ne "izlaza od ulaza".



Karakteristike kompresora i ekspandora

Sa slike se vidi da će odbirci velikog intenziteta biti znatno manje oslabljeni od onih malog intenziteta koji će pretrpjeti veće slabljenje.

Karakteristike kompresora i ekspandora moraju biti komplementarne u tom smislu da, ako se vežu u tandem kompresor - ekspandor, ulaznom signalu *x* u kompresor mora da odgovara izlazni signal *y* iz ekspandora takav da je *y = x.* To je uslov da ovaj tandem, poznat pod nazivom **kompandor**, ne unosi izobličenje.



Proces neravnomjerne kvantizacije ostvarene upotrebom kompresora i ravnomjerne kvantizacije

- U donjem dijelu prethodne slike nacrtana je karakteristika kompresora *u = F(x)*, gdje *x* predstavlja amplitude odbiraka ulaznog signala, a *u* amplitude odbiraka na izlazu iz kompresora. Karakteristika kvantizacije je predstavljena stepenastom krivom i svi koraci kvantizacije na njoj su međusobno jednaki.
- Posmatramo *i* – ti interval kvantizacije. Amplitude odbiraka primarnog signala *x* koje su takve da je $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, poslije kompresije postaju ravne u i nalaze se u intervalu $u_i \leq u \leq u_{i+1}$. Sve amplitude iz ovoga intervala poslije kvantizacije postaju jednake u_{qi}. Odbirak takve amplitude u_{qi} koji dođe na ulaz ekspandora, na njegovom izlazu ima amplitudu y_i. Dakle, svi odbirci čije su amplitude *x*, gdje je $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, reprodukovaće se na prijemu kao jedan te isti odbirak amplitude y_i.
- Prema tome, srednja kvadratna greška u ovom intervalu biće:

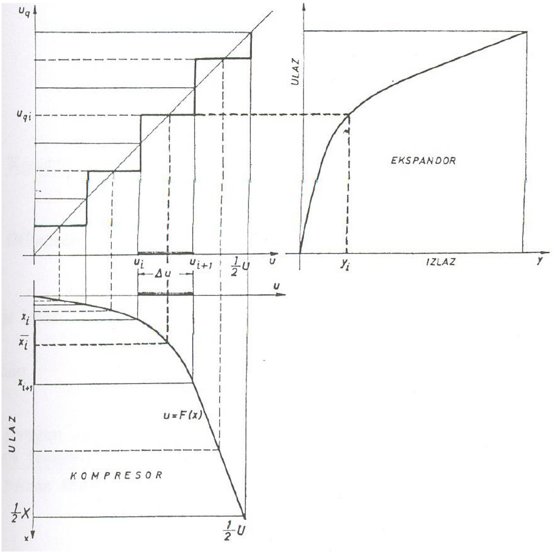
$$\overline{u_{Ni}^2} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - y_i)^2 p(x) dx$$

U ovom izrazu *p(x)* predstavlja funkciju gustine vjerovatnoće koja karakteriše raspodjelu amplituda odbiraka *x* primarnog signala *x(t).*

Pretpostavimo da je

$$y_i = \frac{1}{2}\left(x_i + x_{i+1}\right) = \overline{x_i}$$

Ovakva pretpostavka biće utoliko ispravnija ukoliko je interval (x_{i+1} - x_i) manji. Neka je širina tog intervala Δx_i



$$x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$$

Uz učinjenu pretpostavku važiće da je:

$$x_i = \overline{x_i} - \frac{1}{2}\Delta x_i$$

$$x_{i+1} = \overline{x_i} + \frac{1}{2}\Delta x_i$$

Pošto je Δx_i malo, možemo smatrati da se funkcija gustine vjerovatnoće u ovom intervalu ne mijenja i da iznosi:

$$p(x) = p\left(\overline{x_i}\right) \quad \text{za} \quad x_i \le x \le x_{i+1}$$

Sada se može pisati da je:

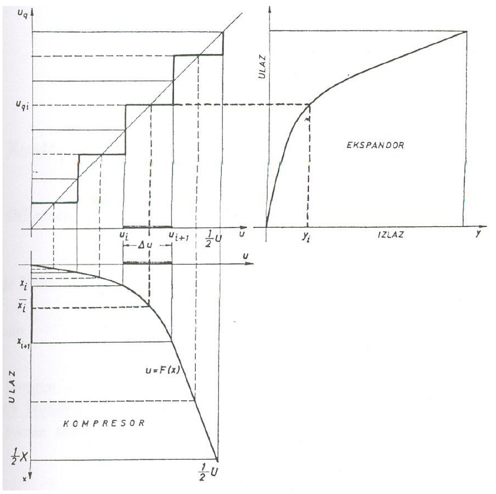
$$\overline{u_{Ni}^2} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - y_i)^2 p(x)\,dx \cong p(\overline{x}_i) \int_{\overline{x}_i - \frac{1}{2}\Delta x_i}^{\overline{x}_i + \frac{1}{2}\Delta x_i} (x - \overline{x}_i)^2\,dx = \frac{1}{12}(\Delta x_i)^3\, p(\overline{x}_i)$$

Karakteristika kompresora data je izrazom *u = F(x).* Diferenciranjem ovog izraza dobija se: *du = F ʹ(x)dx*

Ako je širina koraka kvantizacije dovoljno mala može se napisati da je:

$$\Delta u \cong F'(x)\Delta x$$

$$\Delta u_i \cong F'(\overline{x}_i)\Delta x_i$$



Drugim riječima, funkcija *u = F(x),* u intervalu (x_{i+1} - x_i) aproksimira se njenom tangentom u tački $x = \overline{x}_i$.

Prema tome, imamo da je: $$\Delta x_i \cong \frac{\Delta u_i}{F'(\overline{x}_i)}$$

Ali, kako su koraci kvantizacije Δu_{i} konstantni i jednaki

$$\Delta u_i = \Delta u = \frac{U}{q} = const$$

to je

$$\Delta x_i \cong \frac{1}{F'\left(\overline{x_i}\right)} \cdot \frac{U}{q}$$

Tako da se dobija:

$$\overline{u_{Ni}^2} \cong \frac{1}{12}\left(\Delta x_i\right)^3 p\left(\overline{x_i}\right) = \frac{1}{12}\left(\Delta x_i\right)^2 p\left(\overline{x_i}\right)\Delta x_i = \frac{1}{12}\frac{U^2}{q^2}\frac{p\left(\overline{x_i}\right)}{\left[F'\left(\overline{x_i}\right)\right]^2}\Delta x_i$$

Ukupna srednja kvadratna greška iz svih intervala kojih ima q, i koji su numerisani od 0 do $q - 1$, biće:

$$\overline{u_N^2} = \sum_{i=0}^{q-1}\overline{u_{Ni}^2} = \frac{1}{12}\frac{U^2}{q^2}\sum_{i=o}^{q-1}\frac{p\left(\overline{x_i}\right)}{\left[F'\left(\overline{x_i}\right)\right]^2}\Delta x_i$$

Pošto smo pretpostavili da su intevali Δx_i mali, može se preći sa sume na integral, tako da je:

$$\overline{u_N^2} = \frac{1}{12}\frac{U^2}{q^2}\int_{-\frac{X}{2}}^{\frac{X}{2}} \frac{p(x)}{\left[F'(x)\right]^2}\,dx$$

Kompresor će se napraviti tako da je

$$x = \frac{1}{2}X, u = \frac{1}{2}U$$

pri čemu je:

$$\frac{1}{2}X = \frac{1}{2}U$$

Stoga prethodni integral može da se napiše u obliku:

$$\overline{u_N^2} = \frac{1}{12}\frac{U^2}{q^2}\int_{-\frac{U}{2}}^{\frac{U}{2}} \frac{p(x)}{\left[F'(x)\right]^2}\,dx$$

Ovaj izraz predstavlja opšti izraz za srednju kvadratnu grešku kvantizacije za neku datu karakteristiku kompresije *u = F(x).*